

①

## § Ταξινόηση Επιμερισμών 2<sup>ος</sup> λόγος στον $\mathbb{R}^3$

• Στοιχεία από την Γραμμική Άλγεβρα

Εάν αναφέρεται σε συμμετρικούς πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nm} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Θεώρημα ①: Κάθε συμμετρικός πίνακας  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  έχει όλες τις ιδιοτιμές πραγματικές.

Θεώρημα ②: Εάν  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  συμμετρικός πίνακας, τότε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας

$P$  έτσι ώστε  $PAP^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$  όπου  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  οι ιδιοτιμές του  $A$ .

Παράδειγμα: Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Βρίσκει να διαγωνοποιήσουμε τον πίνακα  $A$

Λύση

Βήμα 1: Υπολογισμός ιδιοτιμών

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές είναι ρίζες

του  $P_A$  ήδη

$$0 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 3-\lambda & -1-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+3)^2 (\lambda-3)$$

Αρα οι ιδιοτιμές είναι:

$\lambda_1 = -3$  (διπλά)

$\lambda_2 = 3$  (απλά)

Βήμα 2: Βίωση ιδιοτιμών

• Υπολογισμός του  $v(3)$

Βάζουμε το  $\lambda$  στην  $A - \lambda I$

$$\begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -2x + y = -z \\ x - 2y = -z \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Αρα

$$V(3) = \{t(1,1,1) : t \in \mathbb{R}\}$$

Μια βάση του  $V(3)$  είναι

$$\vec{v} = (1,1,1)$$

• Υπολογισμός του  $V(-3)$

Θεωρούμε το αλgebra

$$\begin{cases} 2x+2y+2z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t-s \\ y=s \\ z=t \end{cases}, t,s \in \mathbb{R}$$

$$\text{Αρα } V(-3) = \{(-t-s, s, t) : t, s \in \mathbb{R}\}$$

Μια βάση του  $V(-3)$  είναι

$$\vec{v}_2 = (1,1,0)$$

$$\vec{v}_3 = (-1,0,1)$$

• Υπολογισμός των  $P$

Οι πίνακες  $P$  προκύπτει από μια ΟΚΒ, ομορμονορμωμένη

Έχουμε ήδη την βάση

$$\vec{u}_1 = (1,1,1)$$

$$\vec{u}_2 = (-1,1,0)$$

$$\vec{u}_3 = (-1,0,1)$$

Μεσω της διαδικασίας Gram-Smidt θα βρούμε μια ορθογώνια βάση

$$\begin{cases} \vec{y}_1 = \vec{u}_1 \\ \vec{y}_2 = \vec{u}_2 - \text{proj}_{\vec{y}_1}(\vec{u}_2) \\ \vec{y}_3 = \vec{u}_3 - \text{proj}_{\vec{y}_1}(\vec{u}_3) - \text{proj}_{\vec{y}_2}(\vec{u}_3) \end{cases} \quad \text{όπου } \text{proj}_{\vec{y}}(\vec{x}) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} \vec{y}$$

Υπολογισμοί

$$\begin{cases} \vec{y}_1 = (1,1,1) \\ \vec{y}_2 = (-1,1,0) = \frac{\langle (-1,1,0), (1,1,1) \rangle}{\langle (1,1,1), (1,1,1) \rangle} (1,1,1) = (-1,1,0) \\ \vec{y}_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Αρα η ορθογώνια βάση που ζητούμε είναι

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{y}_3}{\|\vec{y}_3\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

3

Αρα  $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$  και  $PAP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

### • Τετραγωνικές μορφές

Ορισμός: Γνωρίζουμε έναν  $n$ -διάστατο Ευκλείδειο χώρο. Πέπει ότι η  $Q: E \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μια τετραγωνική μορφή αν υπάρχει συμμετρικός πίνακας  $A \in M_n \times n(\mathbb{R})$ ,  $A = (a_{ij})$  και για ΟΚΒ  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  έτσι ώστε

$$Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

όπου  $x_1, \dots, x_n$  είναι οι συνιστώσες του  $\vec{x}$  ως προς την βάση  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$

Παρατήρηση: Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί με μορφή πίνακα ως

$$Q(\vec{x}) = {}^t X A X \quad \text{όπου} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε: Έστω  $Q$  μια τετραγωνική μορφή με πίνακα  $A = (a_{ij})$  ως προς κάποια ΟΚΒ  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ . Τότε, υπάρχει για αυτή ΟΚΒ  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  ως προς την οποία η  $Q$  έχει την μορφή

$$Q(\vec{x}) = \lambda_1 (x_1')^2 + \dots + \lambda_n (x_n')^2 \quad \text{όπου} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα } A$$

Απόδειξη: Ας πούμε ο  $A$  είναι πραγματικός, συμμετρικός, τότε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας  $P$  έτσι ώστε  $PAP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Αρα  $A = P \cdot D \cdot P^t$

Επομένως,  $Q(\vec{x}) = {}^t X A X$   
 $= {}^t X (P D P^t) X$   
 $= {}^t ({}^t P X) \cdot D \cdot ({}^t P X)$   
 $\stackrel{Z = {}^t P X}{=} {}^t Z \cdot D \cdot Z \quad \Rightarrow \quad Q(\vec{x}) = {}^t Z \cdot D \cdot Z$

Αρα  $Q(\vec{x}) = \lambda_1 (x_1')^2 + \dots + \lambda_n (x_n')^2$

Από αυτόν τον ορισμό.

Ορισμός: Το  $n$ -διάστατο  $n$ -πλάτος  $n$ -συστήμα (οι μεταβ. του  $P$ ) απορρίπτονται κάποιοι είδους cas τετραγωνικής μορφής  $Q$

6)

Παράδειγμα 1: Τι αποτελεί η επιφάνεια με εξίσωση  $2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz = 1$

Λύση: Γράψουμε την τετραγωνική μορφή  $Q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz$

Ο πίνακας της  $Q$  είναι

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Για διαγωνοποίηση την τετραγωνική μορφή  $Q$

• Εύρεση ιδιοτιμών

$$Q = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -(1-\lambda) & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

⇒ Ιδιοτιμές είναι

$$\boxed{\lambda_1 = 0}, \boxed{\lambda_2 = 1}, \text{ και } \boxed{\lambda_3 = 3}$$

• Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων:

Δεν είναι δύσκολο να βρούμε ότι οι ιδιοδιανύσματα είναι

$$v(0) = \{t(1, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$v(1) = \{t(0, 1, -1) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$v(3) = \{t(-2, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$$

Το Συστήμα

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 1)$$

$$\vec{u}_2 = (0, 1, -1)$$

$$\vec{u}_3 = (-2, 1, 1) \text{ αποτελεί βάση από ιδιοδιανύσματα. Το Συστήμα:}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \text{ αποτελεί Ο.Β. από ιδιοδιανύσματα}$$

Συνεπώς,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$$

και στη νέα βάση

έχουμε

$$Q(x', y', z') = (y')^2 + 3(z')^2$$

5

Επομένως, η επιφάνεια μας στο νέο σύστημα έχει εξίσωση  
 $(y')^2 + 3(z')^2 = 1$  και πορισμένη ελάχιστη κύκλωση

Ερώτηση: Τι γίνεται αν έχουμε και γραμμικά προς  $x, y, z$  στην εξίσωση της επιφάνειας που έχουμε προς αναγνώριση.

Απάντηση:

(1) Διαγωνοποιούμε την τετραγωνική μορφή

(2) Αντικαθιστούμε τα  $x, y, z$  γραμμικά μορφών από την σχέση:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

(3) κάνουμε συμπλήρωση τετραγώνων

Παραδειγμα: Τι πορισμένη η επιφάνεια με εξίσωση  $x^2 + y^2 + z^2 - 4yz + 3x + 2y = 0$

Λύση: Εξωραφούμε την τετραγωνική μορφή  $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4yz$

Ο πίνακας της  $Q$  είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ οι ιδιοτιμές είναι:}$$

$$V(-1) = \{(0, t, t), t \in \mathbb{R}\}$$

$$V(1) = \{(t, 0, 0), t \in \mathbb{R}\}$$

$$V(3) = \{(0, -t, t), t \in \mathbb{R}\}$$

προκύπτει ότι

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$PAP^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Στην νέα βάση:  $Q(x', y', z') = -(x')^2 + (y')^2 + 3(z')^2$

$$\text{Από την σχέση } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, η εξίσωση προς αναγνώριση έχει την μορφή:

$$0 = -(x')^2 + (y')^2 + 3(z')^2 + 3y' + \frac{2}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

γίνεται:

$$\textcircled{6} \quad G = -\left[\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] + \left[\left(y' + \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right] + 3(z')^2$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y' + \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3(z')^2$$

Beispiel

$$\begin{cases} X = x' - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ Y = y' + \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ Z = z' \end{cases}$$

in der Form mit Ellipsengleichung gegeben als:

$$\boxed{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = -X^2 + Y^2 + 3Z^2}$$